実力をつけるために…

どうしたら自転車が上手に乗れるようになるのだろうか？
補助輪を付けて練習した人もいたでしょう．何度も転んで怪我をして，それでも諦めずに乗り続けることで，上手く乗れるようになりました．自転車に３回しか乗ったことがない人と 300 回乗ったことがある人ではどちらが上手に乗れるでしょうか．その答は明白です．自転車を上手に乗れるようになる為に，競輪選手のビデオを徹底研究する人がいたとしたら，あなたはどうアドバイスしますか？
そんなものをいくら見て研究しても，実際に自転車に乗ってみないと上手にはならないとアドバイスするでしょう．

受験勉強というのは，数学に限らず，自転車を上手に乗ることに似ています．一流の学者の論文を読んだりしてもいけないわけで，実際に自分のまわりにある問題と実際に格闘してもがいて苦しんではじめて問題が上手に解けるようになるのですね．
ただ，受験勉強の場合は，自転車における補助輪に相当する，参考書や予備校，そして「スタディサプリ」など，これから実力をつけようと考えている受験生にとっての踏み台になるものが沢山あります．
それらを上手に利用して，最後は自分の力で時間の許す限り多くの問題を経験して，制限時間内でちゃんとした解答を書けるようになるまで徹底的に練習することによって，合格がより確実なものになるわけです．

以上のことを意識しながら授業を受けて，自分の及ばない所を少しでもなおしていけば，必ず数学はできるようになるはずです．

最後まで諦めずに頑張りましょう !!

堺　義明

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

高３　トップレベル数学ＩＡⅡＢ（後期）

目　次

第 25 講　円と放物線の関係

第 26 講　$f(x,\ y)+k\times g(x,\ y)=0$ について

第 27 講　軌跡・領域の求め方

第 28 講　正領域，負領域

第 29 講　リンゴを分ける方法

第 30 講　勘違いと条件付き確率

第 31 講　四面体について

第 32 講　式の値と実数解条件

第 33 講　相加平均と相乗平均

第 34 講　対称式について

第 35 講　方程式と共役解

第 36 講　1 の n 乗根

第 37 講　３次方程式の解の公式について

第 38 講　整数問題 Part Ⅰ

第 39 講　整数問題 Part Ⅱ

第 40 講　複数の変数の取り扱い

第 41 講　なす角の攻め方

第 42 講　偶関数，奇関数，対称移動

第 43 講　必要条件からヒントを得る

第 44 講　二項係数

第 45 講　コーシー・シュワルツの不等式

第 46 講　対称性

第 47 講　x の整式を求める

第 48 講　身の回りの数学

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第25講　円と放物線の関係

25　次の各問いに答えよ．ただし，円と放物線がある点で接するとは，その点で円と放物線が共有点をもち，かつその点におけるそれぞれの接線が一致することである．

(1)　放物線 $y=x^2$ と円 $x^2+(y-\beta)^2=r^2$ $(r>0)$ が異なる 2 点で接している．ただし，β は定数とし，接点以外の共有点はもたないものとする．このとき r を求めよ．

(2)　放物線 $y=x^2$ とある点で接し，点 $(1,\ \beta)$ を中心とする円がちょうど 3 つあるとする．このとき定数 β の条件を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第25講　円と放物線の関係

25　座標平面上で1つの円が放物線 $y=x^2$ に右側から接し，かつ x 軸に上から接している．放物線との接点Aの x 座標を $a\ (>0)$ とするとき，円の中心Cの座標を求めよ．

ただし，円と放物線がある点で接するとは，その点で両者が共有点をもち，かつその点における両者の接線が一致することをいう．

【選択肢】

㋐　$C\left(\dfrac{a(1+\sqrt{4a^2+1})}{2},\ \dfrac{a^2\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}+1}\right)$　㋑　$C\left(\dfrac{1+\sqrt{4a^2+1}}{2},\ \dfrac{a\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}+1}\right)$

㋒　$C\left(\dfrac{a^2(1+\sqrt{4a^2+1})}{2},\ \dfrac{a^4\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}+1}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 25 講　円と放物線の関係

25　次の各問いに答えよ．ただし，円と放物線がある点で接するとは，その点で円と放物線が共有点をもち，かつその点におけるそれぞれの接線が一致することである．

(1)　放物線 $y=x^2$ と円 $x^2+(y-\beta)^2=r^2$ $(r>0)$ が異なる 2 点で接している．ただし，β は定数とし，接点以外の共有点はもたないものとする．このとき r を求めよ．

(2)　放物線 $y=x^2$ とある点で接し，点 $(1,\ \beta)$ を中心とする円がちょうど 3 つあるとする．このとき定数 β の条件を求めよ．

【答】 (1) $r=\sqrt{\beta-\dfrac{1}{4}}$ $\left(\beta>\dfrac{1}{2}\right)$　(2) $\beta>\dfrac{2+3\sqrt[3]{4}}{4}$

【解答】

(1)　$y=x^2$ を $x^2+(y-\beta)^2=r^2$ に代入した式 $y+(y-\beta)^2=r^2$ すなわち $y^2-(2\beta-1)y+\beta^2-r^2=0$ が正の重解をもてばよいので

$$(2\beta-1)^2-4(\beta^2-r^2)=0 \text{ かつ } 2\beta-1>0$$

$$\therefore\quad r^2=\beta-\frac{1}{4} \text{ かつ } \beta>\frac{1}{2}$$

よって求める r は $\boldsymbol{r=\sqrt{\beta-\dfrac{1}{4}}\ \left(\beta>\dfrac{1}{2}\right)}$

(2)　$y=x^2$ より $y'=2x$ であるので，放物線 $y=x^2$ 上の点$(t,\ t^2)$ における法線は $1(x-t)+2t(y-t^2)=0$ すなわち $x+2ty-t-2t^3=0$ となる．

この法線が点 $(1,\ \beta)$ を通るので，$1+2t\beta-t-2t^3=0$ ゆえに $2t^3-(2\beta-1)t-1=0$ となるが，この t の異なる実数解の個数が 3 となるような β を考えればよい．

その条件とは $f(t)=2t^3-(2\beta-1)t-1$ とおいたとき，$f(t)$ が極値をもち，$f(t)$ の極大値が正で $f(t)$ の極小値が負となることである．

$f'(t)=6t^2-(2\beta-1)$ より，$f(t)$ が極値をもつ条件は $2\beta-1>0$ すなわち $\beta>\dfrac{1}{2}$ である．

この条件のもとで $f(t)$ の増減は

t	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{2\beta-1}{6}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{2\beta-1}{6}}$	$\cdots$
$f'(t)$	＋	0	－	0	＋
$f(t)$	↗		↘		↗

となる．

$$f\left(-\sqrt{\frac{2\beta-1}{6}}\right)=\frac{\sqrt{6}}{9}(2\beta-1)^{\frac{3}{2}}-1,\ f\left(\sqrt{\frac{2\beta-1}{6}}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{9}(2\beta-1)^{\frac{3}{2}}-1$$

となるが，$-\dfrac{\sqrt{6}}{9}(2\beta-1)^{\frac{3}{2}}-1<0$ であるので，求める条件は $\dfrac{\sqrt{6}}{9}(2\beta-1)^{\frac{3}{2}}-1>0$ かつ $\beta>\dfrac{1}{2}$，つまり $\boldsymbol{\beta>\dfrac{2+3\sqrt[3]{4}}{4}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

練習問題解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 25 講　円と放物線の関係

25 座標平面上で１つの円が放物線 $y=x^2$ に右側から接し，かつ x 軸に上から接している．放物線との接点 A の x 座標を $a\ (>0)$ とするとき，円の中心 C の座標を求めよ．

ただし，円と放物線がある点で接するとは，その点で両者が共有点をもち，かつその点における両者の接線が一致することをいう．

【選択肢】

㋐ $C\left(\dfrac{a(1+\sqrt{4a^2+1})}{2},\ \dfrac{a^2\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}+1}\right)$　㋑ $C\left(\dfrac{1+\sqrt{4a^2+1}}{2},\ \dfrac{a\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}+1}\right)$

㋒ $C\left(\dfrac{a^2(1+\sqrt{4a^2+1})}{2},\ \dfrac{a^4\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}+1}\right)$

【答】 ㋐

【解答】

$y'=2x$ より点 $A(a,\ a^2)$ における接線 l は

$$l：y=2a(x-a)+a^2 \qquad \therefore\ \ y=2ax-a^2$$

よって l と x 軸との交点を D とすると，$D\left(\dfrac{1}{2}a,\ 0\right)$

ここで

$$AD=\frac{1}{2}a\sqrt{4a^2+1}$$

より，円と x 軸との接点を B とおくと

$$\overrightarrow{DB}=\left(\frac{1}{2}a\sqrt{4a^2+1},\ 0\right)$$

また $\angle CDB=\theta$ とおくと

$$\tan 2\theta=2a$$

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=2a \qquad \therefore\ \ a\tan^2\theta+\tan\theta-a=0$$

$\tan\theta>0$ より

$$\tan\theta=\frac{-1+\sqrt{4a^2+1}}{2a}$$

よって

$$\begin{aligned}BC&=DB\cdot\tan\theta\\&=\frac{1}{2}a\sqrt{4a^2+1}\cdot\frac{-1+\sqrt{4a^2+1}}{2a}=\frac{\sqrt{4a^2+1}\,(\sqrt{4a^2+1}-1)}{4}\\&=\frac{a^2\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}+1}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathbf{C}\left(\frac{a(1+\sqrt{4a^2+1})}{2},\ \frac{a^2\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{4a^2+1}+1}\right)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。